# TD n°22 : Matrices et applications linéaires

**Exercice 1. Isomorphisme de $\mathbb{R}^2$**

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit $f$ l'application de $E$ dans $E$ définie par :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Déterminer la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $M^2 = 3M - 3I_2$.
4. En déduire sans calcul que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.

**Exercice 2. Isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

Soit $J$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application $S$ qui associe à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice :

$$S(M) = JMJ.$$

1. Montrer que $S$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $S \circ S$. En déduire que $S$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'isomorphisme réciproque ?
3. Déterminer la matrice de $S$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On notera $A$ cette matrice.
4. On considère les éléments :
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Montrer que $(I, J, K, L)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Déterminer la matrice de $S$ dans la base $(I, J, K, L)$. On notera $D$ cette matrice.

**Exercice 3. Représentation matricielle dans différentes bases**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de $f$.
2. On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}_2[X]$ :
$$Q(X) = X, \qquad R(X) = X^2 + 1, \qquad S(X) = X^2 - 1$$
   Montrer que $(Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice $M'$ de $f$ dans cette base.

**Exercice 4. Endomorphisme canoniquement associée à une matrice**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de $u$.
2. Calculer la matrice de $u^2$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de $u$.

**Exercice 5. Endomorphisme canoniquement associée à une matrice (bis)**

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer $M^2$ et $M^3$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$.
5. Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$.
6. En déduire que $I - M$ est inversible. Préciser $(I - M)^{-1}$.

**Exercice 6. Matrices semblables**

On dit que deux matrices $A$ et $B$ sont semblables s'il existe une matrice $P$ inversible telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On suppose dans cet exercice que $A$ et $B$ sont semblables.

1. Montrer que
$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ est inversible.}$$
2. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$,
$$A^p = I \quad \Leftrightarrow \quad B^p = I.$$
3. On dit qu'une matrice $A$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$, montrer que
$$A \text{ est nilpotente} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ est nilpotente.}$$
4. Montrer que
$$A = \lambda I \quad \Rightarrow \quad A = B.$$

**Exercice 7. Rang de matrices**

Calculer le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & -2m & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$